

CENTRO UNIVERSITÁRIO DE BRASÍLIA - UNICEUB

FACULDADE DE TECNOLOGIA E CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS – FATECS

CURSO: ENGENHARIA CIVIL

ANA BEATRIZ TONELLO PINO

**OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE DE
ESTRUTURAS TRELIÇADAS**

Brasília

2017

ANA BEATRIZ TONELLO PINO

**OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE DE
ESTRUTURAS TRELIÇADAS**

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC)
apresentado como um dos requisitos para
a conclusão do curso de Engenharia Civil
do UniCEUB - Centro Universitário de
Brasília.

Orientador(a): Eng.^a Nathaly Sarasty
Narvaez.

Brasília

2017

ANA BEATRIZ TONELLO PINO

**OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE DE
ESTRUTURAS TRELIÇADAS**

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC)
apresentado como um dos requisitos para
a conclusão do curso de Engenharia Civil
do UniCEUB - Centro Universitário de
Brasília.

Brasília, 04 de julho de 2017.

Banca Examinadora

Eng^a. Civil: M. Sc. Nathaly Sarasty Narvaez

Orientador

Eng^a. Civil: Rosanna Duarte Fernandes Dutra

Examinador Interno

Eng. Civil: Javier Andres Forero Valencia

Examinador Interno

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela vida e por todas as oportunidades que me concedeu.

Ao meu pai, por ter despertado em mim a vontade de ser engenheira e seguir seus passos.

À minha irmã por ter acreditado em mim e sempre ter me ajudado, apoiado e incentivado com sua enorme delicadeza.

À minha mãe, por toda preocupação, carinho, orações e por ser meu exemplo na busca diária de me tornar uma pessoa melhor.

Ao meu primo João Lucas pela companhia em tantas tardes de estudo e por ter me ajudado sempre que precisei.

Aos amigos que fiz durante esses cinco anos de curso e aos que estão na minha vida a mais tempo, por tornarem essa jornada mais fácil e prazerosa.

À minha orientadora Nathaly, por todas as oportunidades, orientações, ensinamentos e paciência.

A todos que de alguma maneira estiveram comigo e me auxiliaram nesse processo.

RESUMO

O principal objetivo deste trabalho é utilizar a otimização baseada em confiabilidade, (*RBDO*) para minimizar a função de custo de estruturas sujeitas a restrições probabilísticas, descritas por funções de estado limite, a fim de determinar soluções ótimas e seguras. A metodologia *RBDO* aplicada no presente trabalho consiste na utilização de uma abordagem de laço duplo. O problema de confiabilidade foi solucionado através do método de confiabilidade de primeira ordem (*FORM*), com o algoritmo melhorado por Hasofer- Lind- Rackwitz, iHLRF. O problema de otimização foi solucionado através do algoritmo Polak-he. Essa metodologia foi implementada para obter-se a melhor configuração, com um número baixo de iterações, de uma treliça plana e uma espacial e minimizar seu peso de forma a considerar as restrições impostas e um índice de confiabilidade alvo utilizado para medir o nível de segurança das estruturas. As incertezas relacionadas às propriedades geométricas, propriedades dos materiais e às cargas são considerados parâmetros estatísticos. Os resultados obtidos mostram a eficácia da metodologia aplicada, sendo uma ferramenta importante para engenheiros estruturais.

Palavras-chave: análise de confiabilidade, treliça, otimização baseada em confiabilidade

ABSTRACT

The purpose of this is to use the Reliability Based Design Optimization (*RBDO*) to minimize the cost function of structures subjected to probabilistic constraints, described as limit state functions in order to provide optimal and safe solutions. The *RBDO* methodology applied in the present work uses a double loop approach. The reliability problem was solved by the First Order Reliability Method (*FORM*), with Hasofer- Lind-Rackwitz's improved algorithm (*iHLRF*). The optimization problem was solved by the Polak-he algorithm. This methodology was applied to reach for the best design, with a significant number of iterations, of a plain and a spacial truss and minimize their weight in order to consider the restraints and the target reliability index. The uncertainties related to the geometrical properties, material properties and to the loads applied were considered statistical parameters. The obtained results show the employed methodology's, efficiency, and therefore an important tool for structural engineers.

Key-words: reliability analysis, truss, reliability based design optimization

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.Densidade de probabilidade conjunta e região de falha(Barragué. C. L., 2010)	20.
Figura 2. Método FORM.....	22.
Figura 3.Abordagem RBDO de laço duplo	25.
Figura 4.Algoritmo Polak-he(Dubourg 2011)	31.
Figura 5.Treliça plana de 10 barras.....	35.
Figura 6.Índice de confiabilidade vs. Iterações.....	37.
Figura 7. Função minimizada a) função de custo minimizada b) função de custo ...	38.
Figura 8.Variáveis de projeto a) variáveis normalizadas vc. Iterações b) variáveis vs. Iterações.....	38
Figura 9.Índice de confiabilidade vs. Iterações a) β para barras horizontais b) β para barras verticais c) β para barras inclinadas.....	39.
Figura 10.Treliça espacial de 25 barras	41.
Figura 11.Índice de confiabilidade vs. iterações.....	45.
Figura 12.Função minimizada a) função de custo minimizada b) função de custo ..	45.
Figura 13.Variáveis de projeto a) variáveis normalizadas vc. Iterações b) variáveis vs. Iterações.....	46

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.RIA vs. PMA	27
Tabela 2.Não-linearidades das restrições probabilísticas	27
Tabela 3.Variáveis e seus parâmetros determinísticos	35
Tabela 4.Índices de confiabilidade β para um período de referência de 1 ano	37
Tabela 5.Reações de apoio treliça 10 barras	39
Tabela 6. Forças em cada barra treliça.....	40
Tabela 7.Comprimento das barras de cada grupo	42
Tabela 8. Parâmetros determinísticos das variáveis	43
Tabela 9.Reações de apoio treliça de 25 barras	46
Tabela 10.Forças em cada barra de cada grupo.....	47

LISTA DE ABREVIATURAS

FORM	<i>Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (em inglês First Order Reliability Method)</i>
HLRF	Algoritmo de Hasofer–Lind–Rackwitz–Fiessler
iHLRF	Algoritmo melhorado de Hasofer–Lind–Rackwitz–Fiessler
JCSS	<i>Comitê de Segurança Estrutural (em inglês Joint Comitee on Structural Safety)</i>
MPP	<i>Ponto Mais Provável de Falha (em inglês Most Probable Point)</i>
PDF	<i>Função Densidade de Probabilidade (em inglês Probability Density Function)</i>
Pf	Probabilidade de falha
PMA	Formulação de Medida de Performance (em inglês <i>Performance Measure Approach</i>)
RBDO	<i>Otimização Baseada em Confiabilidade (em inglês Reliability Based Design Optimization)</i>
RIA	<i>Formulação do Índice de Confiabilidade (em inglês Reliability Index Approach)</i>
SORA	<i>Método de Otimização Sequencial e Avaliação de Confiabilidade (em inglês, Sequential Optimization and Reliability Assesment Method)</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

c – Função de custo

d_n - Diâmetro das barras

d – Variáveis de projeto

p – Parâmetros fixos em relação ao problema de otimização

C - Confiabilidade

E – Módulo de elasticidade do aço

F - Vetor das forças que atuam nos nós

M – Função de mérito

P – Carga pontual

R_x e R_y – Reações de apoio

R - Resistência do material em seu estado limite

S - Esforços resultantes da aplicação de carga

X – Vetor das variáveis de projeto

$g(X)$ - Função de estado limite

$f_x(X)$ – Função densidade de probabilidade (PDF)

u^* – Espaço de variáveis reduzidas

θ_g – Vetor parâmetro das variáveis aleatórias

β – Índice de confiabilidade

β_{target} - Índice de confiabilidade alvo

Φ – Distribuição cumulativa normal padrão

α – Vetor gradiente normalizado

$\Delta G_x(x)$ – Gradiente da função de estado limite

n_c – Restrições determinísticas

d^l e d^u - Limites inferiores e superiores das variáveis de projeto

P_{fl}^0 – Probabilidade de falha mínima aceitável

$g_i^r(x, \eta)$ - Restrições de confiabilidade que dependem das variáveis aleatórias x

η - Parâmetros determinísticos de confiabilidade

$f(d)_+$ - Restrição mais violada no ponto d

h^i – Direção descendente

s^j - Tamanho do passo

d^0 - Ponto inicial de projeto

δ – Parâmetro da direção descendente

μ – Valor médio das variáveis determinísticas

γ – Parâmetro da direção descendente

ε_c - Qualidade da solução ótima

k - Matriz de rigidez da estrutura

Δ - Vetor deslocamento dos nós

σ^a - Tensão de escoamento do aço

σ^i - Tensão de escoamento da barra

σ_{Euler} - Tensão de Euler

$v_{2,2}$ - Deslocamento vertical do segundo nó

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	Objetivos	15
2.1	Objetivo geral	15
2.2	Objetivos Específicos	15
3	REVISAO BIBLIOGRAFICA	16
4	METODOLOGIA	18
5	Fundamentação Teórica	19
5.1	Confiabilidade Estrutural	19
5.1.1	<i>Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM)</i>	21
5.2	OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS.....	23
5.2.1	<i>Otimização baseada em confiabilidade</i>	24
5.2.2	<i>Método do Laço Duplo</i>	26
5.3	Algoritmo POLAK-HE	28
5.3.1	<i>Direção descendente</i>	29
5.3.2	<i>Tamanho do passo</i>	29
5.3.3	<i>Implementação</i>	30
5.4	MÉTODO DA RIGIDEZ DIRETA	32
6	Análise numérica	34
6.1	Exemplo 1: treliça plana de 10 barras	34
6.2	Exemplo 2: Treliça espacial de 25 barras	40
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÃO	49

8	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	50
----------	--	-----------

1 INTRODUÇÃO

Na engenharia, tradicionalmente, a análise e o projeto de estruturas tem sido baseados em métodos determinísticos e semi probabilísticos. A resistência de um elemento era determinada de forma que sua carga fosse majorada e sua resistência estrutural fosse minorada com certa margem de segurança. Essa margem, conhecida como fator de segurança, consiste em valores determinados de forma empírica ou usando métodos semi probabilísticos aplicados em todo tipo de estruturas.

Nas últimas décadas, começaram a ser utilizados métodos baseados em técnicas probabilísticas para o desenho de estruturas. Nestes métodos, a confiabilidade de um sistema pode ser quantificada, pois é levada em consideração a probabilidade de colapso do sistema.

No presente trabalho, o objetivo consiste em minimizar uma função custo relativa ao volume de uma estrutura treliçada por meio do método de otimização baseada em confiabilidade, em inglês, *Reliability-based Design Optimization (RBDO)*.

Em *RBDO* existem duas metodologias para se modelar o problema: a formulação de medida de performance, em inglês, *Performance Measure Approach (PMA)* e formulação do índice de confiabilidade, em inglês, *Reliability Index Approach (RIA)*. De acordo com a metodologia *RIA*, existem as abordagens de único laço e laço duplo. O laço duplo, em inglês, *double loop* é um método de resolução onde em um primeiro nível ocorre a otimização, baseada nas variáveis de desenho e no segundo nível é solucionado o problema de confiabilidade, baseado nas variáveis aleatórias do problema.

Neste trabalho, o método de double loop foi desenvolvido utilizando o algoritmo FORM para análise de confiabilidade e o algoritmo Polak-He para a otimização. Foram analisadas duas estruturas treliçadas, a primeira, uma estrutura plana de 10 barras e a segunda uma estrutura espacial de 25 barras. O método de cálculo de tensões utilizado foi o método da rigidez direta. Como resultado obtém-se os diâmetros ótimos para o projeto de treliça sujeita a restrições determinísticas e probabilísticas de forma a garantir um valor de índice de confiabilidade alvo.

2 Objetivos

2.1 Objetivo geral

Aplicar o algoritmo de otimização baseada em confiabilidade (*RBDO*) a estruturas treliçadas planas e espaciais, a fim de minimizar o volume da estrutura sujeita a restrições determinísticas e probabilísticas relacionadas com as tensões máximas do material, tensão máxima de Euler e deslocamentos máximos.

2.2 Objetivos Específicos

- Definir os conceitos de otimização e confiabilidade estrutural.
- Definir o método de otimização baseada em confiabilidade (*RBDO*).
- Aplicar o método *RBDO* em duas treliças, uma plana e uma espacial determinando os diâmetros ótimos das barras a fim de minimizar o volume da estrutura sujeita às restrições determinísticas e probabilísticas.
- Validar os resultados utilizando software estrutural baseado no método dos elementos finitos.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

As áreas de estudo que englobam este trabalho são a confiabilidade e a otimização estrutural. Para entendimento do assunto foram estudadas teses e publicações que abordam o tema tratado.

As técnicas de otimização baseada em confiabilidade vêm ganhando força e sendo largamente aplicadas no ramo da engenharia estrutural. Diversos autores abordam essa problemática nas mais variadas maneiras. Pereira (2007) estudou a aplicação de otimização baseada em confiabilidade em estruturas treliçadas espaciais e empregou uma análise estatística para determinação da resposta da estrutura, levando em consideração um comportamento linear e restrições de tensão e escoamento.

Barrague (2010) analisou o comportamento de diversos métodos de otimização baseada em confiabilidade, aplicando a solução em estruturas nas quais uma função de custo deve ser minimizada, tendo sua tese baseada em códigos internacionais, os Eurocódigos, que são um conjunto de normas europeias que tem em vista a unificação dos critérios e normativas de cálculo e dimensionamento de estruturas.

Dubourg (2011) desenvolveu sua tese em torno da busca pela melhor metodologia para se resolver problemas de otimização estrutural baseada em confiabilidade, mediante um custo computacional razoável. O enfoque da tese baseou-se no uso da teoria de aprendizado estatístico, que consiste na construção de meta modelos dos modelos originais, pois são mais fáceis de avaliar. Dentre os exemplos utilizados como validação de seus estudos, foi abordado um problema de RBDO, mas o enfoque principal foi dado no projeto de cascas geometricamente imperfeitas propensas a flambagem.

Diversos trabalhos sobre RBDO são encontrados na literatura e diversos autores contribuíram para aprimorar esse método. Yang e Gu 2004 codificaram, discutiram e testaram diversos métodos de RBDO aplicados a algoritmos de laço duplo. Tu (1999) propôs a metodologia PMA como sendo o inverso da metodologia RIA e mostrou que o PMA é mais robusta, eficiente e apresenta taxas de convergência mais elevadas.

Youn e Choi (2004), discutiram a não linearidade nas abordagens RIA e PMA envolvidas em *RBDO* para restrições probabilísticas. Foram estudados diversos tipos de distribuição a fim de se obter as não linearidades envolvidas no processo de otimização. Foi concluído pelos autores que a metodologia RIA depende muito mais da transformação não linear em relação a *PMA* e que essa consegue trabalhar com uma maior variedade de distribuições sem que a função de estado limite sofra um acréscimo significativo no número de avaliações.

Ao resolver um problema de *RBDO* seguindo a metodologia RIA, é comum que seja utilizado o algoritmo iterativo FORM para solucionar o problema de confiabilidade. Esse algoritmo foi inicialmente desenvolvido por Hasofer e Lindt em 1974, para determinar o ponto ótimo de projeto de uma estrutura. Posteriormente, foi melhorado por Rackwitz e Fissler, dando origem ao algoritmo i HLRF ou FORM melhorado, que será utilizado nesse trabalho.

Em 1997, Polak propôs o algoritmo Polak-he, que é utilizado para resolver problemas de otimização restringida com inequações não lineares. Devido a sua formulação baseada em minimizar/maximizar uma função de custo, o algoritmo consegue solucionar problemas com muitas restrições.

4 METODOLOGIA

O entendimento dos estudos e implementação dos métodos de otimização baseada em confiabilidade foram embasados em artigos técnicos e defesas de teses que abordam o assunto.

Assim sendo, para o desenvolvimento do trabalho foram estudados os métodos de otimização baseada em confiabilidade para que posteriormente essa teoria pudesse ser validada e aplicada em duas estruturas: uma treliça plana de 10 barras e uma espacial de 25 barras, ambas sujeitas a restrições probabilísticas e determinísticas.

Foram aplicados algoritmos a fim de minimizar a função de custo das estruturas analisadas, ou seja, minimizar seu volume determinando um diâmetro ótimo para as barras. Para isso, foi utilizado um software computacional baseado no método dos elementos finitos, o MatLab.

As treliças foram submetidas a cargas pontuais em seus nós. Para que fossem analisadas as forças axiais resultantes em suas barras, foi utilizado um programa computacional baseado no método da rigidez direta, o Sap2000.

Com base na implementação da metodologia descrita acima, foram analisados os resultados obtidos utilizando-se gráficos e tabelas para maior compreensão.

5 Fundamentação Teórica

5.1 Confiabilidade Estrutural

Na engenharia, métodos de confiabilidade estrutural são utilizados para estimar a probabilidade de falha de um sistema, levando-se em consideração todas as incertezas. A falha ocorre quando a estrutura não atende os objetivos para os quais ela foi concebida (Pereira, 2007).

Toda estrutura apresenta uma probabilidade de falha, porém essa probabilidade deve ser mantida em níveis aceitáveis e satisfazer o desempenho esperado, para evitar danos tanto de ordem material como em relação à segurança humana. A confiabilidade pode ser definida como complemento da probabilidade de falha do sistema, conforme a Equação 1:

$$c = 1 - pf \quad \text{Equação 1}$$

onde pf é a probabilidade de colapso do sistema durante sua vida útil. Entende-se por vida útil o período no qual a estrutura deve manter aspectos de segurança, funcionalidade e aparência esperados, sendo submetida apenas a medidas de conservação e manutenção.

Para o cálculo de pf é necessário determinar os estados limites da interface de falha/segurança a partir da função $g(X)$, equação do estado limite, e das diversas variáveis de projeto X , de acordo com a fórmula a seguir (Beck, A. T., 2010):

$$g(X) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{Equação 2}$$

onde X é um vetor que inclui todas as variáveis analisadas no problema.

Para avaliar a segurança de uma estrutura é necessário levar em consideração a probabilidade de ocorrerem falhas, ou seja, da função de falha atingir valores que se encontram no domínio de falha.

O valor da função de falha distingue o domínio de falha do domínio de segurança, ou seja, $g(X) > 0$, o sistema está seguro. Se $g(X) = 0$, o sistema se encontra no domínio limite (superfície de falha). Se $g(X) < 0$, ocorre a falha.

Considerando duas variáveis básicas, R e S , sendo R a resistência do material em seu estado limite e S os esforços resultantes da aplicação de carga, a função de falha pode ser definida da seguinte maneira:

$$G(X) = R(X) - S(X) \quad \text{Equação 3}$$

Supondo que são invariáveis com o tempo, considera-se que ocorre a falha quando o estado limite é superado, ou seja, quando a resistência $R(X)$ é menor que o esforço $S(X)$.

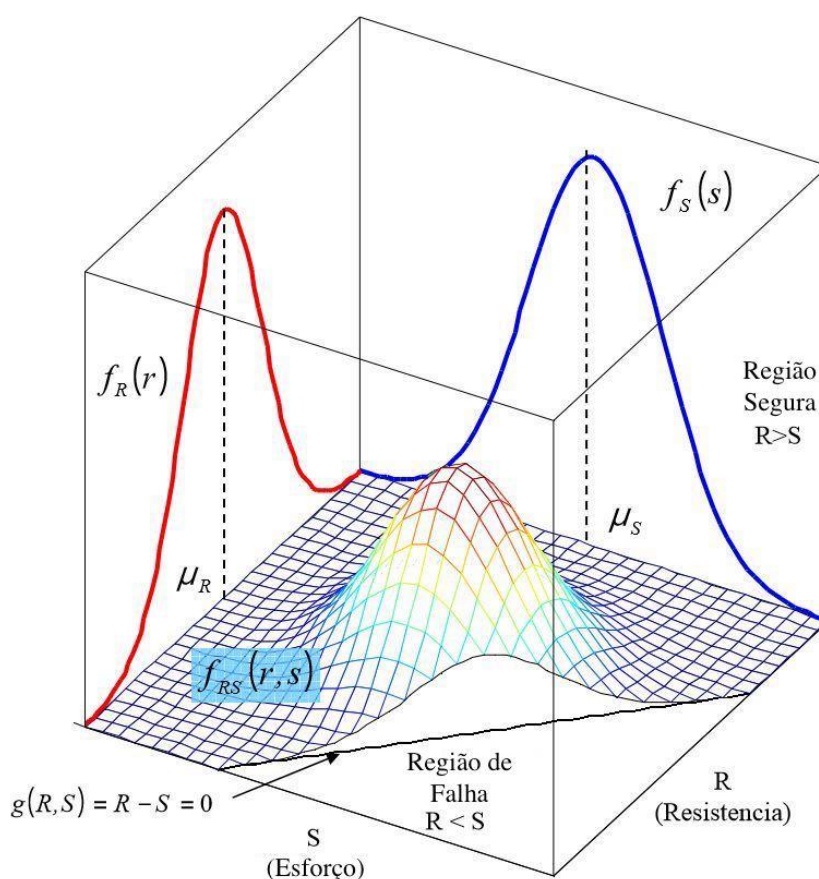


Figura 1. Densidade de probabilidade conjunta e região de falha (Barragué. C. L., 2010)

Dado que $f_x(X)$ representa a função densidade de probabilidades, em inglês, *Probability Density Function (PDF)* das variáveis aleatórias, a probabilidade de falha pode ser descrita como:

$$P_f(x) = \int g(X) \leq 0 f_x(x) dx \quad \text{Equação 4}$$

A integral geralmente é difícil de se calcular. Devido a isso, são utilizados métodos aproximados que se baseiam na aproximação da função de densidade $f_x(x)$ da região de falha dada pela equação de estado limite $g(X) \leq 0$ ou de ambas.

Nos últimos 30 anos, têm sido desenvolvidos diversos métodos para calcular essa integral e resolver problemas de confiabilidade. Esses métodos podem ser divididos da seguinte maneira:

1. Métodos de simulação que utilizam a equação para avaliar a integral da equação 4, sendo o mais conhecido o método de Monte Carlo.
2. Métodos aproximados que evitam o processo de integração, transformando $f_x(x)$ em uma função de densidade de probabilidade multinormal e são utilizadas algumas propriedades desse tipo de distribuição para determinar aproximadamente a probabilidade de falha. Um dos métodos usados é o chamado de método de confiabilidade de primeira ordem, em inglês, *First Order Reliability Method*, (*FORM*).

5.1.1 Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (*FORM*)

O método de confiabilidade de primeira ordem (*FORM*) executa uma aproximação da função de estado limite no espaço de variáveis reduzidas u , determinando assim o ponto de maior probabilidade de falha, (*MPP* do inglês *Most Probable Point*). Ao encontrar as coordenadas u^* do *MPP*, é resolvido o seguinte problema de otimização:

$$u^* = \operatorname{argmin}\{|u| \mid g(x(u), \theta_g) = G(u, \theta_g) = 0\} \quad \text{Equação 5}$$

Uma vez obtido o *MPP*, o índice de confiabilidade alvo (β) (Hasofer 1974, Rackwitz and Flessler 1978, Liu and Der Kiureghian 1991) é calculado como $\beta = \alpha^T u^*$, onde $\alpha = -\Delta_u G(u^*) / \|\Delta_u G(u^*)\|$ é o vetor gradiente normalizado no *MPP*. A aproximação de probabilidade de falha de primeira ordem é dada por: $p_f = \Phi(-\beta)$, onde Φ é distribuição cumulativa padrão normal (Zhang and Der Kiureghian 1995). O algoritmo escolhido para resolver a Equação 5 foi o HLRF melhorado, desenvolvido

por Zhang and DerKiureghian (Zhang and Der Kiureghian, 1994), por ter apresentado eficácia em estudos anteriores.

O objetivo é minimizar a distância entre a origem e o *MPP* no espaço reduzido. A distância obtida é interpretada como o índice de confiabilidade β e a probabilidade de falha do sistema pode ser facilmente calculada a partir deste índice. A figura abaixo representa geometricamente como o método FORM atua:

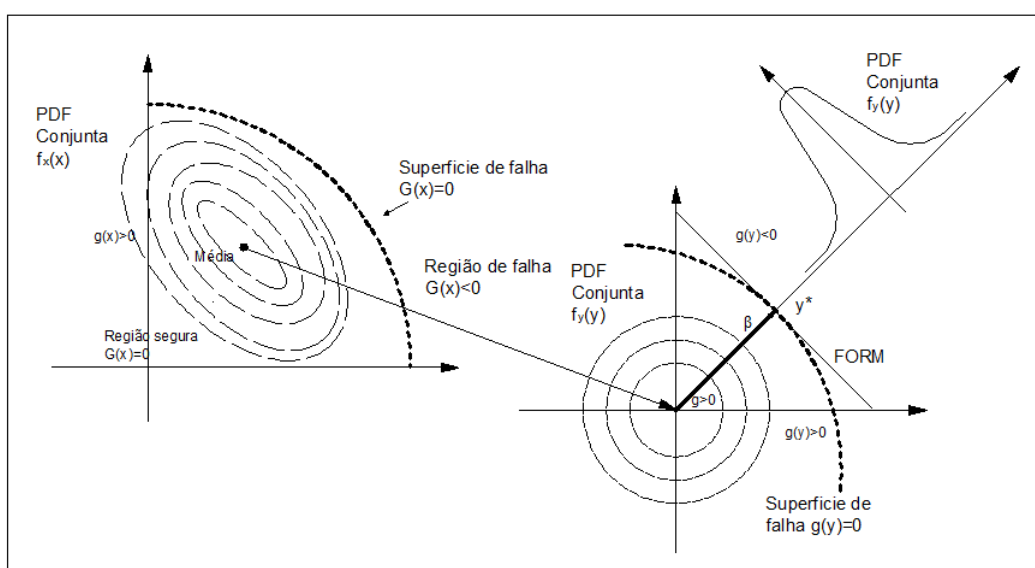


Figura 2. Método FORM

Em comparação com outros métodos de simulação, o FORM tende a requerer menor armazenamento e menos cálculos em cada etapa. Inclusive, para grande parte das situações, esse método converge rapidamente para os resultados esperados.

O método FORM é extremamente eficaz quando a superfície de estado limite $G(u) = 0$, não é muito curvada. Isso pode ocorrer devido a dois fatores:

1. Não linearidade da função de estado limite no espaço original $G(x)$;
2. Não linearidade na transformação $u = u(x)$ no espaço normal padrão quando as variáveis não são normais.

O método FORM, apresenta uma exatidão adequada para a maioria das situações. Quando as avaliações da função de estado limite $G(x)$ e de seu gradiente $\Delta G_x(x)$ são obtidas recorrendo-se repetidamente a um código de elementos finitos, há um custo computacional que não é depreciável.

Para determinar o ponto ótimo de projeto, um algoritmo de otimização eficiente deveria recorrer o mínimo possível a este código de elementos finitos a cada avaliação e, deste ponto de vista, o algoritmo *iHLRF* seria o mais eficiente.

Visto que o método *FORM* se baseia em uma aproximação local da superfície de estado limite em volta do ponto ótimo de projeto, é necessário ser cauteloso ao utilizar esse método. Deve-se assegurar que a função de estado limite é de origem contínua e que não há pontos locais de densidade de probabilidade significativos (no domínio de falha) distintos do entorno do ponto ótimo. Assim não deverá haver pontos locais a uma distância mínima da origem ou pontos mínimos locais. Como em outros em métodos de aproximação, é possível obter-se também resultados extremamente exatos mediante uso cauteloso do algoritmo.

5.2 OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS

O processo de otimização de estruturas tem como objetivo minimizar uma função satisfazendo restrições de confiabilidade e, segundo Pereira (2007), pode ser calculado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar a:} & \quad f(d, p) \\
 \text{Sujeito a:} & \quad n_c(d, p) = 0 \quad i = 1 \dots nre \\
 & \quad n_c(d, p) \leq 0 \quad i = nre + 1 \dots n \\
 & \quad d^l \leq d \leq d^u \quad i = 1 \dots nvar
 \end{aligned}
 \tag{Equação 6}$$

onde d são as variáveis de projeto e p são os parâmetros fixos em relação ao problema de otimização. n_c são as restrições determinísticas do modelo (como por exemplo: tensões, deslocamentos, carga crítica, etc). d^l e d^u são os limites inferiores e superiores das variáveis de projeto, respectivamente. Através da definição da função de performance, pode-se escrever $n_c(d, p) = -g(d, p)$.

Nas últimas décadas, foram desenvolvidas diversas técnicas no campo de otimização. A otimização baseada em confiabilidade (*RBDO*) é um processo de

otimização que leva em consideração essas incertezas durante todo o processo e tem como resultado a melhor relação entre uma função de custo e as restrições probabilísticas envolvidas no sistema.

5.2.1 Otimização baseada em confiabilidade

A otimização baseada em confiabilidade, *RBDO*, é o processo de otimização no qual se busca a melhor maneira de minimizar uma função de custo e simultaneamente assegurar a confiabilidade do sistema, levando em consideração variáveis probabilísticas. Uma variável é considerada probabilística quando as incertezas do sistema são levadas em consideração e, portanto, dependem de variáveis aleatórias.

Em um processo de *RBDO*, a otimização do projeto ocorre no espaço das variáveis de projeto e a análise de confiabilidade ocorre no espaço das variáveis aleatórias. Para que se encontre a probabilidade de falha, é necessário realizar uma grande quantidade de cálculos. Conseqüentemente para que se encontre uma configuração estrutural ótima que leve em conta todas as restrições, é preciso trocar repetidamente as variáveis de projeto durante o processo de otimização.

A *Formulação* básica para o problema de otimização baseada em confiabilidade *RBDO* para um conjunto de variáveis X pode ser descrito por:

$$\mathbf{d}^* = \underset{c(\mathbf{d})}{\operatorname{argmin}} : \begin{cases} f_i(\mathbf{d}) \leq 0, i = 0, \dots, n_c \\ P[g_l(X(\mathbf{d})) \leq 0] \leq P_{fl}^0, l = 1, \dots, n_p \end{cases} \quad \text{Equação 7}$$

Nesta formulação, c é a função custo a ser minimizada respeitando as variáveis de projeto $\mathbf{d} = d_i, i = 1, \dots, n_d \in D \subset R^{n_d}$, enquanto são satisfeitas as n_c restrições determinísticas $f_i = 1, \dots, n_c$ que limitam o espaço de projeto admissível. As funções de estado limite também são necessárias e são elas: $g_l = 1, \dots, n_p$ determinadas, por exemplo, em relação ao código de projeto. No *RBDO*, essas restrições são transformadas em probabilísticas $P[g_l(X) \leq 0] \leq P_{fl}^0, l = 1, \dots, n_p$. Nesta expressão P_{fl}^0 é a probabilidade de falha mínima aceitável.

Deve-se levar em consideração que nessa formulação básica, as variáveis de projeto podem ser parâmetros de distribuições probabilísticas, ou seja,

variáveis descritas pelo vetor d . Para modelar essas variáveis são utilizados seus valores médios respectivos e tipos de distribuição. São eles: normal, lognormal, exponencial, weibull e distribuições de valores extremos. Em problemas de *RBDO*, deve-se manter o menor número possível de variáveis aleatórias para uma maior eficiência computacional.

Para a avaliação do problema de *RBDO* existem principalmente três abordagens: métodos de laço único que realizam um processo de confiabilidade ao interior do ciclo de otimização, métodos de laço duplo que realizam ciclos independentes de confiabilidade e otimização e métodos desacoplados como o método de otimização sequencial e avaliação de confiabilidade, em inglês, sequential optimization and reliability assesment method, (*SORA*) no qual é realizado primeiro uma otimização e posteriormente uma análise de confiabilidade.

Uma das maneiras de abordar o problema da equação 7 consiste em realizar um ciclo de otimização por força bruta sobre a avaliação de confiabilidade(Figura 4). Esse método é conhecido como laço duplo, (em inglês double loop). Segundo Royset e Polak,1997, isto pode ser computacionalmente caro se forem utilizados métodos como Monte Carlo.

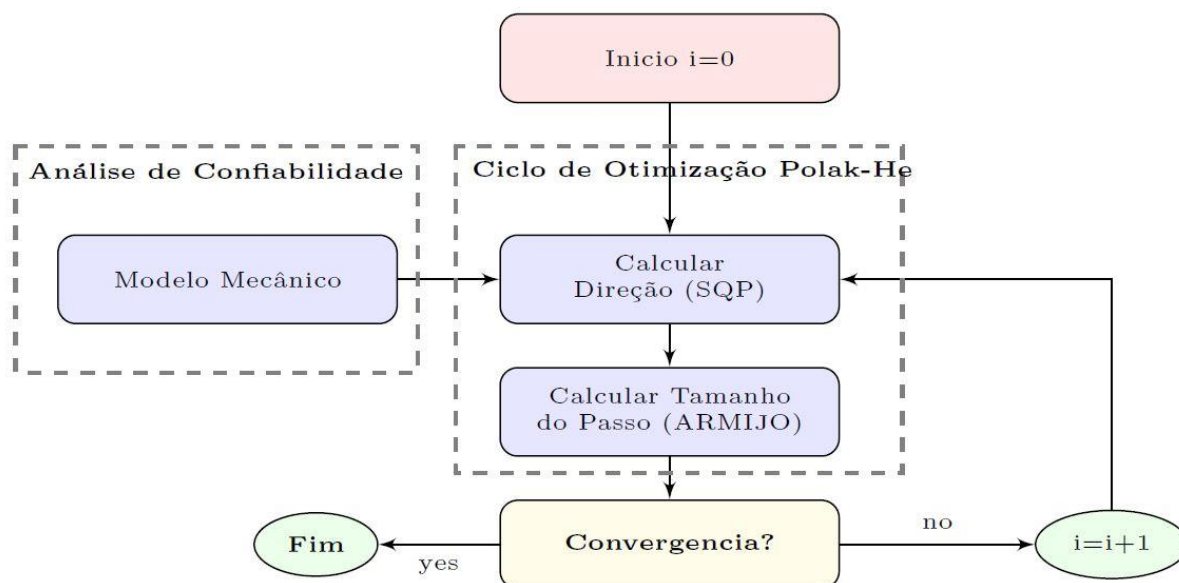


Figura 3. Abordagem RBDO de laço duplo

5.2.2 Método do Laço Duplo

O problema de *RBDO* ocorre em dois espaços: o espaço das variáveis de projeto e no espaço das variáveis aleatórias que são obtidas mediante transformação probabilística do espaço de variáveis físicas.

O método mais básico de resolução de problemas *RBDO*, o laço duplo, consiste na aplicação de uma *Formulação* dividida em dois níveis. No laço interno, para cada conjunto de variáveis de projeto, é desenvolvida uma análise de confiabilidade para avaliar as restrições probabilísticas e buscar o MPP. Já no laço externo são levadas em consideração a otimização sobre as variáveis de projeto.

Neste método as variáveis determinísticas são trocadas por variáveis probabilísticas, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar a:} & \quad f(d, p) \\ \text{Sujeito a:} & \quad g_i^r(x, \eta) \geq 0 \quad i = 1 \dots nr \\ & \quad d^l \leq d \leq d^u \quad i = 1 \dots n \end{aligned} \quad \text{Equação 8}$$

onde $g_i^r(x, \eta)$ são restrições de confiabilidade que dependem das variáveis aleatórias x e dos parâmetros determinísticos η .

Pode-se também descrever as restrições através do índice de confiabilidade β :

$$g_i^r(x, \eta) = \beta_i(x, \eta) - \beta \quad \text{Equação 9}$$

Onde β é o índice de confiabilidade e $\beta = -\Phi^{-1}(p_f)$. Quando as restrições são descritas da maneira acima, a formulação é chamada de formulação do índice de confiabilidade (*RIA*, do inglês reliability index approach).

Para se resolver problemas de confiabilidade, normalmente se utiliza a metodologia *FORM* e o algoritmo *iHLRF*. Os valores de β obtidos através dessa metodologia, são chamados de índice de confiabilidade de primeira ordem.

Em alguns casos, a formulação do índice de confiabilidade não converge para resultados esperados ou converge lentamente. Isso ocorre principalmente quando a superfície limite está muito distante da origem no espaço padrão ou quando não existe a superfície limite, ou seja, $G_i(u, \eta) = 0$.

Para solucionar esse problema, alguns autores propuseram uma alternativa conhecida como formulação de medida de performance (*PMA*, do inglês performance measure approach). Esse método baseia-se em uma análise inversa em relação à RIA e cada restrição probabilística é descrita através do valor de uma função quantitativa, ao invés de ser descrita pelo índice de confiabilidade.

Tabela 1. RIA vs. PMA

Formulação	Problema de Otimização	Análise de Confiabilidade
RIA	minimizar $f(\mathbf{d}, \mathbf{p})$ sujeito a $P_{t_i} - P_{f_i}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \geq 0$ ou $\beta_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) - \beta_{t_i} \geq 0$	minimizar $\ \mathbf{u}\ $ sujeito a $G_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = 0$
PMA	minimizar $f(\mathbf{d}, \mathbf{p})$ sujeito a $g_i^P(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \geq 0$	minimizar $G_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})$ sujeito a $\ \mathbf{u}\ = \beta_{t_i}$

Fonte: Youn & Choi, 2004

Como foi descrito anteriormente, o processo de *RBDO* ocorre em dois espaços aleatórios diferentes: o espaço de variáveis aleatórias originais (ou espaço físico X) e o espaço de variáveis aleatórias não correlacionadas u^* . No processo de *RBDO*, é necessário realizar uma transformação T entre os espaços X e U para que seja feita a avaliação das restrições probabilísticas. Essas transformações geralmente são altamente não lineares, com exceção das variáveis normais. A tabela abaixo apresenta as não linearidades que é possível encontrar em cada formulação:

Tabela 2. Não-linearidades das restrições probabilísticas

Formulação	Problema de Otimização	Análise de Confiabilidade
RIA	$\beta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = T^{-1}(\beta(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}))$: Transformação não linear inversa de $\beta(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})$	$G(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = G(T(\mathbf{x}), \boldsymbol{\eta})$ Transformação não linear de $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$
PMA	$g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$: Função de falha original	$\ \mathbf{u}\ $ Função quadrática explícita em relação a \mathbf{u}

Fonte: Youn & Choi, 2004

Dado que um problema de *RBDO* de laço duplo se resolve com dois problemas de otimização, a eficiência dos métodos de otimização depende

significativamente das restrições que esses problemas apresentam. Em problemas que apresentam formulação *RIA*, as restrições dos problemas de otimização podem se tornar altamente não lineares devido às transformações entre os espaços X e U .

Apesar de ser mais eficiente resolver um problema *RBDO* pela metodologia *PMA*, no presente trabalho será utilizada a metodologia *RIA*.

Neste trabalho o problema de *RBDO* foi abordado usando o método de laço duplo, onde o ciclo de otimização é realizado usando o algoritmo Polak-he e o ciclo de confiabilidade mediante o algoritmo i .

A otimização externa feita pelo algoritmo Polak-he (Polak,1997) requer os gradientes das funções de custo, restrições e os gradientes dos índices de confiabilidade β . Os índices de confiabilidade β neste trabalho são obtidos a partir do método de primeira ordem (*FORM*).

5.3 Algoritmo POLAK-HE

O algoritmo Polak- He é utilizado para solucionar o problema de otimização restringida com inequações não lineares. Polak (1997) tem mostrado que solucionar esse problema é equivalente a solucionar o problema de minimizar/maximizar:

$$\mathbf{d}^* = \operatorname{argmin} c(\mathbf{d}) : f(\mathbf{d})_+ \leq 0 \quad \text{Equação 10}$$

onde $f(\mathbf{d})_+ = \max(0; f_i(\mathbf{d}), i = 1, \dots, n_c)$ mostra a restrição mais violada no ponto \mathbf{d} .

Esse algoritmo realiza um processo iterativo em j partindo de um ponto inicial \mathbf{d}^0 . O próximo ponto é calculado da seguinte maneira:

$$\mathbf{d}^{j+1} = \mathbf{d}^j + s^j \mathbf{h}^i \quad \text{Equação 11}$$

onde \mathbf{h}^i é a direção descendente e s^j é o tamanho do passo ao longo desta direção.

5.3.1 Direção descendente

O valor j da direção descendente h^j é calculada da seguinte maneira:

$$h^j = -\frac{1}{\delta}(\mu_0^* \nabla c(d^j) + \sum_{i=1}^{n_c} \nabla f_i(d^j)) \quad \text{Equação 12}$$

onde $(\mu_0^*, (\mu^*)^T)$ é uma solução do subproblema de programação quadrática com restrições lineares.

$$(\mu_0^*, (\mu^*)^T) = \underset{\mu}{\operatorname{argmin}} \theta^j(\mu_0, \mu): \begin{cases} 0 \leq \mu_i \leq 1, i = 0, \dots, n_c \\ \sum_{i=0}^{n_c} \mu_i = 1 \end{cases} \quad \text{Equação 13}$$

Cuja função objetivo é:

$$\theta^j(\mu_0, \mu) = \mu_0 \gamma f(d)_+ + \sum_{i=0}^{n_c} \mu_i f_i(d) + \frac{1}{2\delta} \|(\mu_0^* \nabla c(d^j) + \sum_{i=1}^{n_c} \nabla f_i(d^j))\|^2 \quad \text{Equação 14}$$

Na função objetivo, $\delta > 0$ e $\gamma > 0$ são parâmetros que o algoritmo de Polak-HE podem influenciar na taxa de convergência. (Dubourg, 2011).

5.3.2 Tamanho do passo

O tamanho do passo é determinado por meio da regra de aproximação por busca linear de Goldstein-Armijo. Dados $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$, a regra consiste em achar $s(j)$ tal que:

$$s^j = \max \beta^k: M(d^j, d^j + \beta^k h^j) \leq -\beta^k \alpha \theta^j(\mu_0^*, \mu^*) \quad \text{Equação 15}$$

Onde a função de mérito M mede o progresso devido ao tamanho do passo e é definido por:

$$M(d^j, d^j + \beta^k h^j) = \max \left(\begin{array}{l} c(d^j + \beta^k h^j) - c(d^j) - \gamma f(d^j) + \\ \{f_i(d^j) - f(d^j)_+, i = 1, \dots, n_c\} \end{array} \right) \quad \text{Equação 16}$$

Polak ressalta que os parâmetros α e β podem alterar a taxa de convergência do algoritmo.

5.3.3 Implementação

O algoritmo requer um ponto inicial d e os valores dos quatro parâmetros do algoritmo Polak-He. É necessário a normalização das variáveis de projeto (d), da função de custo (c), das restrições (f) e seus respectivos gradientes. Mais especificamente, c, f e seus gradientes são normalizados em relação ao valor inicial (desde que não seja zero), e as variáveis de desenho (d) são normalizadas em relação ao valor da iteração prévia (desde que não seja zero), a fim de tornar o passo ao longo da direção de busca significativo. Devido a essa normalização, Royset e Polak (2004) propuseram os seguintes parâmetros:

$$\alpha = 0,5, \beta = 0,6, \gamma = 2, \delta = 1,$$

que geram taxas de convergência satisfatórias independentemente da magnitude das diversas variáveis e funções envolvidas (Dubourg, 2011).

O algoritmo interage em j , a partir do ponto inicial $(d)^0$. Primeiramente são avaliadas as funções de custo, as restrições e seus gradientes. Os valores são normalizados de acordo com os valores absolutos iniciais c^0 , $(f_i^0) = 1, \dots, n_c$, desde que sejam diferentes de zero. Os gradientes são normalizados de acordo com seus valores iniciais.

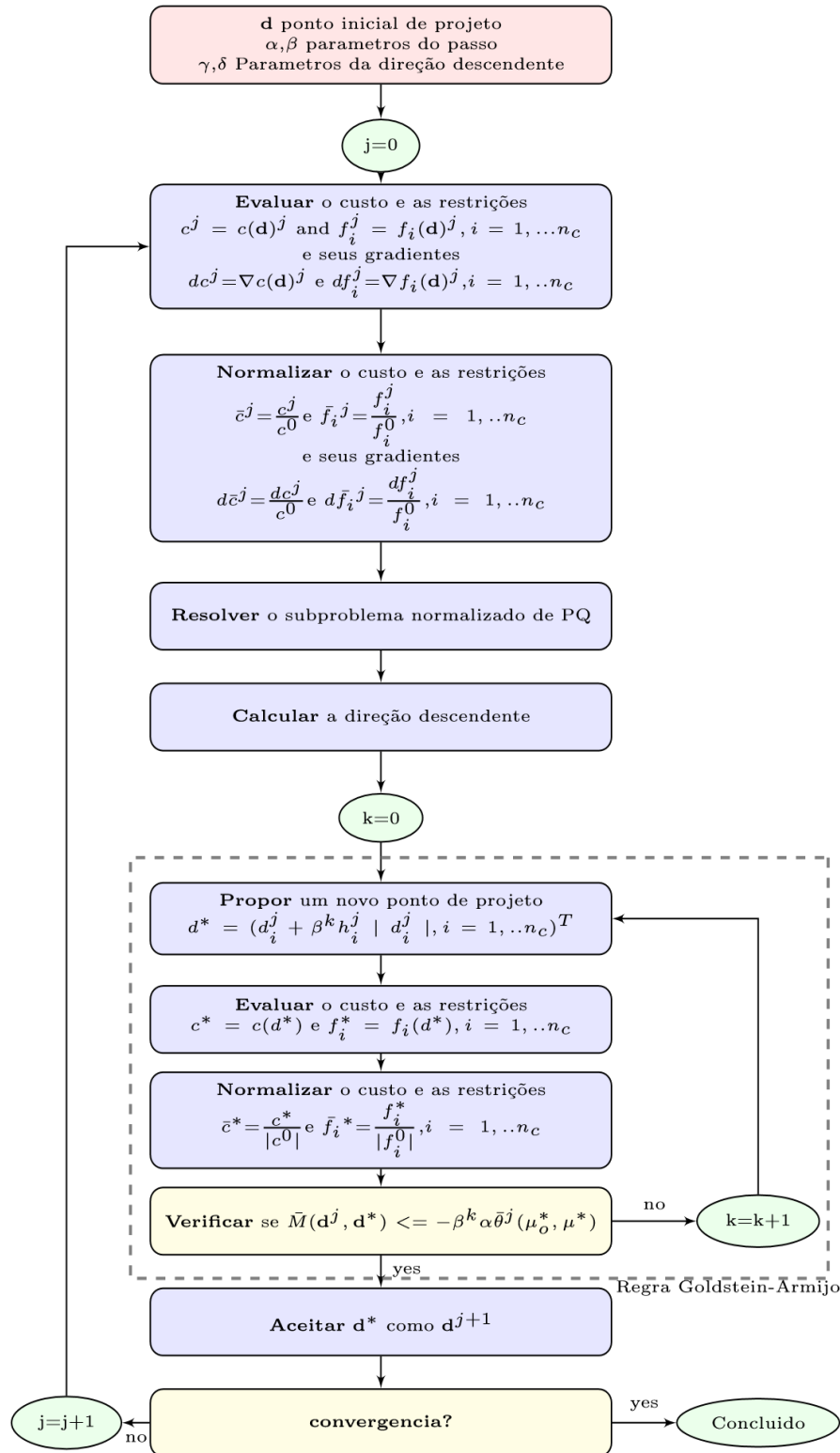


Figura 4. Algoritmo Polak-he (Dubourg 2011)

Posteriormente, o termo j da direção descendente (h) é calculado solucionando um subproblema de programação quadrática normalizado. Este subproblema é solucionado utilizando o toolbox do Matlab.

O segundo passo da iteração em j consiste em encontrar a potência de β que determinará o tamanho j do passo $s(j)$. A potência se inicia com $k=0$ e o primeiro ponto é proposto pela regra $d = s + s * h$, que foi melhorada para levar em conta as diferentes ordens de magnitude das variáveis (d). Esta normalização melhora muito a versatilidade do algoritmo em termos das taxas de convergência. A função de mérito M também utiliza variáveis normalizadas para a função de custo e das restrições.

As taxas de conversão são descritas abaixo:

$$\frac{c(d^j) - c(d^{j+1})}{c(d^0)} = \varepsilon_c \quad \text{Equação 17}$$

onde ε_c controla a qualidade da solução ótima.

Polak (1997) afirma que existe um valor k e n tal que a função mérito acaba sendo satisfeita. Na prática, entretanto, a busca linear é abortada após k incrementos $s^j \leq \beta \leq 6e - 3$. O algoritmo repete os passos até a convergência, isto é, quando o próximo valor é quase invariante em relação ao anterior. Esta normalização melhora muito a versatilidade do algoritmo em termos das taxas de convergência.

5.4 MÉTODO DA RIGIDEZ DIRETA

Para calcular as forças as quais as estruturas treliçadas analisadas foram submetidas, foi utilizado o método da rigidez direta. Esse método consiste na análise dos deslocamentos e das rotações dos nós através do uso de matrizes.

O método da rigidez direta pode ser aplicado em todo tipo de estruturas (treliças, vigas, pórticos, placas e cascas). Para que seja implementado, exige que a estrutura seja dividida em partes básicas que, quando superpostas, equivalem à estrutura original.

Para solucionar o problema, as equações de equilíbrio devem ser escritas em função dos deslocamentos dos nós e das forças produzidas pelos

deslocamentos, pois uma vez que se conhece esses valores, as forças em cada elemento da estrutura são calculadas através da relação força-deslocamento.

As equações de equilíbrio são descritas sob forma matricial da seguinte maneira:

$$k\Delta = F \qquad \text{Equação 18}$$

onde k é a matriz de rigidez da estrutura, Δ é o vetor deslocamento dos nós e F é o vetor das forças que atuam nos nós. O coeficiente de rigidez k_{ij} , representa o grau de liberdade da estrutura. A partir desses dados, é construída a matriz K .

Para se calcular o deslocamento dos nós, é necessário separar a estrutura em partes, ou seja, separar os apoios do restante dos nós. Depois de calculados os deslocamentos, são calculadas as deformações e a partir daí obtém-se a força em cada elemento da estrutura.

6 Análise numérica

Os resultados a serem apresentados foram obtidos através da análise numérica de duas estruturas treliçadas: uma plana de 10 barras e uma espacial de 25. Ambas estão sujeitas a cargas pontuais em seus nós e a restrições probabilísticas e determinísticas.

6.1 Exemplo 1: treliça plana de 10 barras

Este exemplo consiste na otimização baseada em confiabilidade de uma estrutura treliçada plana de 10 barras sujeita a restrições de descolamento e tensões. Essa estrutura é muito utilizada em diversas publicações na área de otimização de estruturas, tornando-se um exemplo clássico para teste de algoritmos.

O problema de *RBDO* para essa estrutura consiste em minimizar seu peso, ou seja, o volume. A estrutura está sujeita às seguintes cargas: $P_1=100\text{kN}$, aplicada no nó 1 e uma carga $P_2=50\text{kN}$ aplicada nos nós 2 e 4. As barras são de aço, apresentam seção circular e as tensões axiais foram calculadas pelo método da rigidez direta.

Considera-se que as barras da estrutura estejam agrupadas em 3 grupos que correspondem às barras horizontais, verticais e inclinadas. Na problemática de projeto estrutural probabilístico são consideradas 3 variáveis de projeto tais que esses valores são os diâmetros das seções transversais de cada grupo: d_1 , d_2 e d_3 . O módulo de elasticidade E e a tensão de escoamento do aço σ^a são parâmetros aleatórios e seguem a distribuição tipo Lognormal.

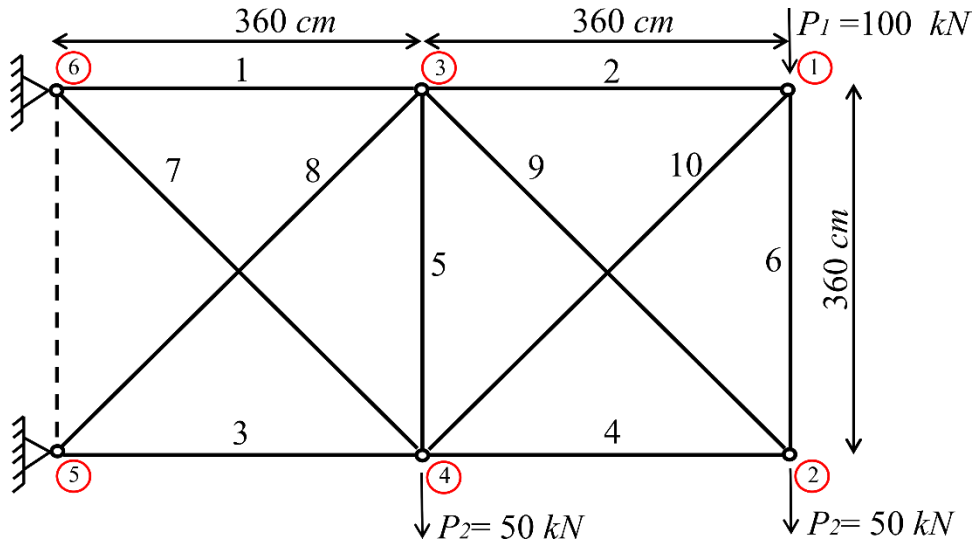


Figura 5. Trelça plana de 10 barras

Neste problema de *RBDO*, será minimizado o volume da trelça que está sujeita a três restrições probabilísticas e duas determinísticas, conforme a tabela 3:

Tabela 3. Variáveis e seus parâmetros determinísticos

Variável	Unidade	μ	$\gamma = \sigma/\mu$	$f(x)$
$d1$	cm	3	-	Determinística
$d2$	cm	3	-	Determinística
$d3$	cm	3	-	Determinística
E	kN/cm^2	21000	1050	Lognormal
P	kN	100	20	Lognormal
f_y	kN	100	20	Lognormal

A formulação *RBDO* é descrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{d}^* = \operatorname{argmin} c(\mathbf{d}) : \sum_{i=1}^n l_i A_i$$

$$P[g_l(X(\mathbf{d})) \leq 0] \leq P_{fl}^0, l = 1, \dots, 7$$

Equação 19

$$\text{com } \beta_{target} = 3,2$$

$$3\text{cm} \leq d_i \leq 20\text{cm}, i = 1, \dots, 10$$

A primeira restrição probabilística é relacionada à tensão de escoamento a seguir:

$$g_1(x) = f_y - \sigma_i \quad \text{Equação 20}$$

A segunda restrição é relacionada à tensão de Euler e diz respeito à flambagem das barras:

$$g_2(x) = \sigma_{Euler} - \sigma_i \quad \text{Equação 21}$$

Sendo $\sigma_{Euler} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 E$ e λ o índice de esbeltez das barras.

Na terceira restrição, o deslocamento vertical do segundo nó não pode ser superior a 3,5cm

$$g_3(x) = 3,5 - v_{2,2} \quad \text{Equação 22}$$

No que diz respeito às restrições determinísticas, o diâmetro das barras deve estar entre 3 e 20cm

$$-d_i + 20 \geq 0$$

Equação 23

$$-d_i + 3 \leq 0$$

O comitê de segurança estrutural (JCSS, do inglês Joint Committee on Structural Safety (Vrouwenvelder 2007), propôs o índice de confiabilidade β_t indicado na tabela abaixo e adota o período de referência de um ano, sendo necessário calcular o β_t para o tempo de vida da estrutura. Neste trabalho, foi considerada uma estrutura com um custo relativo médio da medida de segurança padrão e consequências de falha moderadas, tendo assim um índice de confiabilidade $\beta_t = 4,2$. O valor β_t para

uma estrutura com vida útil de 50 anos foi calculado a partir do índice obtido na tabela 4 e na equação 23. O valor obtido para β_t foi de 3,2.

$$P_{fN} = 1 - (1 - P_f)^N \quad \text{Equação 24}$$

Tabela 4. Índices de confiabilidade β para um período de referência de 1 ano

Custo relativo de medida de segurança	Baixa consequência de falha	Média consequência de falha	Alta consequência de falha
Alto (A)	$\beta=3,1$	$\beta=3,3$	$\beta=3,7$
Normal (B)	$\beta=3,7$	$\beta=4,2$	$\beta=4,4$
Baixo (C)	$\beta=4,2$	$\beta=4,4$	$\beta=4,7$

O problema de *RBDO* foi calculado utilizando o iHLRF para desenvolver a análise de confiabilidade e o algoritmo Polak- he para desenvolver o algoritmo de otimização. A figura abaixo mostra a relação entre o índice de confiabilidade β e o número de iterações. Nota-se que com 5 iterações o índice de confiabilidade $\beta_t=3,2$ calculado através das recomendações do JCSS, foi atingido.

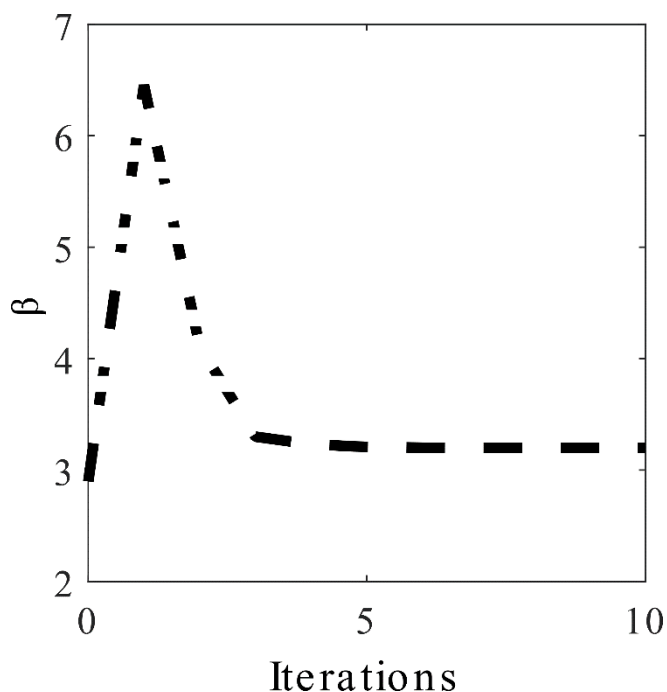


Figura 6. Índice de confiabilidade vs Iterações

O processo de *RBDO* foi realizado de forma a minimizar o volume da treliça de 10 barras. No presente trabalho a função de custo é normalizada em relação

ao valor inicial em cada iteração para assegurar convergência. O custo normalizado e os valores de volume da treliça ao longo das iterações são mostrados abaixo:

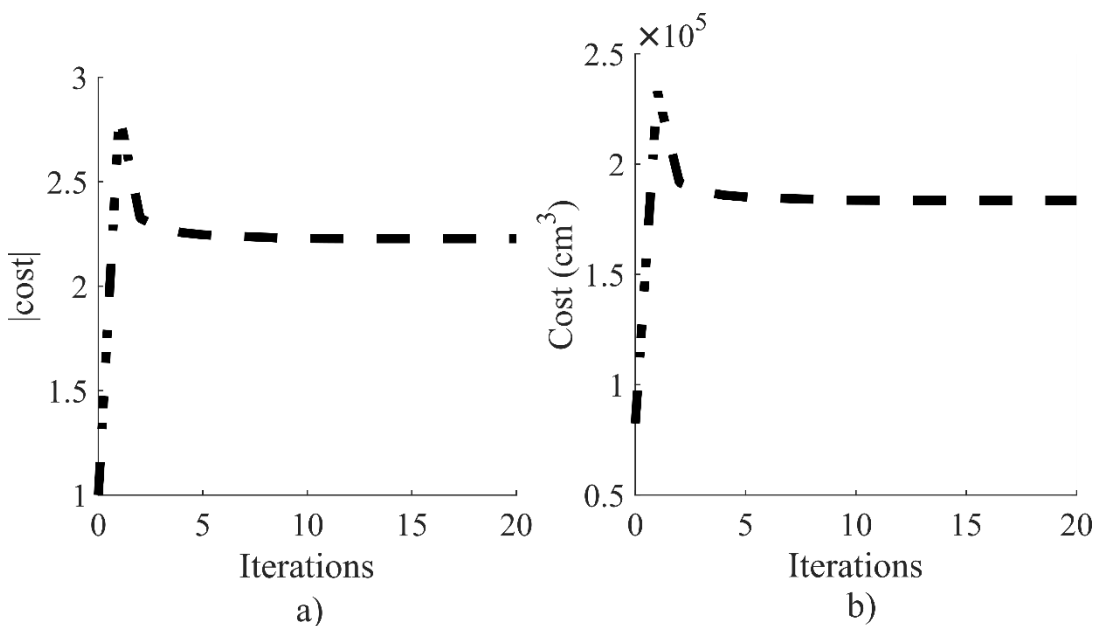


Figura 7. Função minimizada a) função de custo minimizada b) função de custo

Nessa problemática, as barras foram divididas em 3 grupos (horizontais, inclinadas e verticais). O *RBDO* permite que seja determinado um diâmetro para cada grupo, como mostrado na figura a seguir. O resultado final para as barras horizontais foi um diâmetro $d_1 = 8,31$ cm para as barras inclinadas $d_2 = 8,67$ cm e para as barras verticais $d_3 = 6,26$ cm

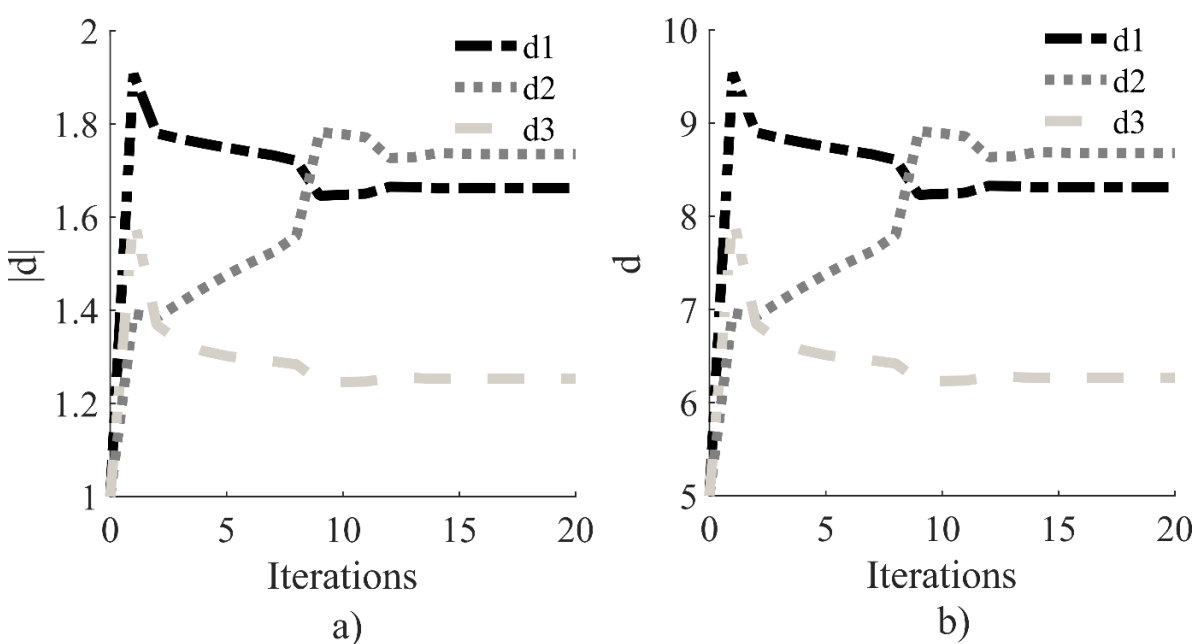


Figura 8. Variáveis de projeto a) variáveis normalizadas vs. Iterações b) variáveis vs. Iterações

A otimização baseada em confiabilidade tem como objetivo auxiliar o engenheiro projetista a escolher a configuração estrutural na qual se obtenha o melhor custo benefício. A figura abaixo mostra os diâmetros obtidos através de diferentes β_t para cada grupo de barras:

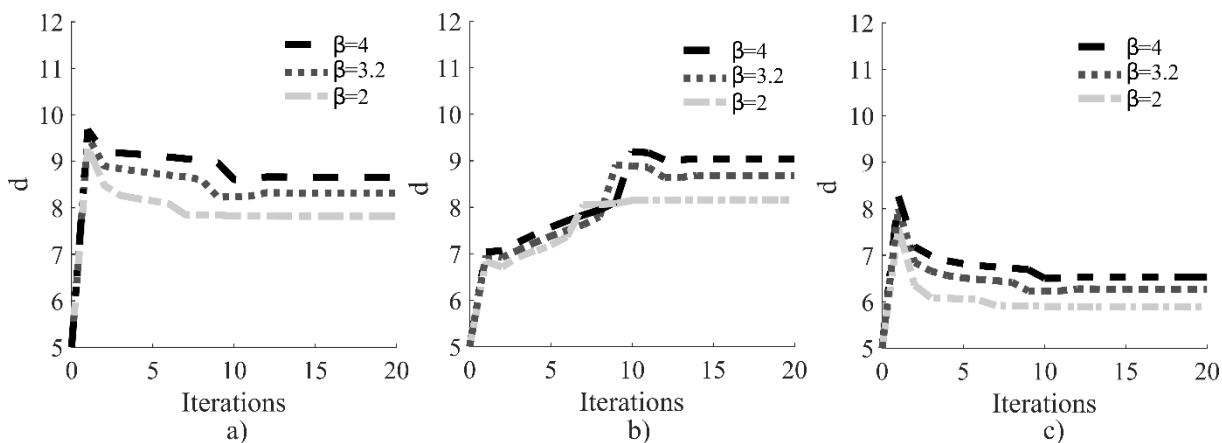


Figura 9.Índice de confiabilidade vs. Iterações a) β para barras horizontais b) β para barras verticais c) β para barras inclinadas

Nas tabelas 5 e 6 são apresentadas as forças axiais resultantes em cada barra da estrutura treliçada assim como suas reações de apoio. A estrutura foi submetida a cargas pontuais nos nós 1,2 e 4 e possui apoios de segunda ordem, onde é restringida a liberdade nos eixos x e y. Foram utilizados os programas SAP2000 e MatLab para obtenção desses resultados por meio do método da rigidez direta. Após análise comparativa, nota-se que os resultados obtidos foram iguais, como esperado.

Tabela 5.Reações de apoio treliça 10 barras

REAÇÕES DE APOIO (R)	R MatLab (kN)		R SAP (kN)	
	Rx	Ry	Rx	Ry
Nó 05	350	97,08	350	97,08
Nó 06	-350	102,92	-350	102,92

Tabela 6. Forças em cada barra treliça

FORÇAS (kN)	F MatLab (kN)	F SAP (kN)
BARRA 1	247,07	247,07
BARRA 2	75,30	75,30
BARRA 3	-252,92	-252,92
BARRA 4	-74,69	-74,69
BARRA 5	22,38	22,38
BARRA 6	-24,69	-24,69
BARRA 7	145,55	145,55
BARRA 8	-137,28	-137,28
BARRA 9	105,63	105,63
BARRA 10	-106,49	-106,49

6.2 Exemplo 2: Treliza espacial de 25 barras

Este exemplo consiste na otimização baseada em confiabilidade de uma treliça espacial sujeita a deslocamentos, forças axiais de tração, compressão e momentos fletores, mostrada na figura 11. A estrutura de 25 barras também é muito utilizada na área de otimização estrutural e no teste de algoritmos e sua forma é similar às de torres utilizadas para suportar cabos de comunicação.

Assim como na treliça de 10 barras analisada acima, foi minimizado seu volume. O material constituinte e o perfil foram os mesmos e as forças também foram calculadas pelo método da rigidez direta.

As barras da estrutura estão agrupadas em 8 grupos distintos sendo que os elementos de cada grupo são iguais. As variáveis de desenho d_1 a d_8 correspondem, respectivamente, ao diâmetro das barras de cada grupo, que junto das cargas aplicadas nos nós (P_1, P_2, P_3, P_4), correspondem às variáveis aleatórias, que são independentes. Os valores médios das seções de cada grupo são as variáveis de projeto e estão restringidas por limites laterais (superior e inferior).

No nó 1, a estrutura está sujeita a uma carga $P_1 = 30kN$ no eixo X, uma carga $P_2 = 50 kN$ no eixo Y e uma carga $P_3 = 100kN$ no eixo Z. Já o nó 2 está sujeito

a uma carga $P_2 = 50 \text{ kN}$ no eixo Y e a uma carga $P_3 = 100 \text{ kN}$ no eixo Z. Os nós 3 e 6 estão ambos sujeitos a uma carga $P_4 = 100 \text{ kN}$ no eixo X. O módulo de elasticidade E e a tensão de escoamento do aço σ^a também são parâmetros aleatórios.

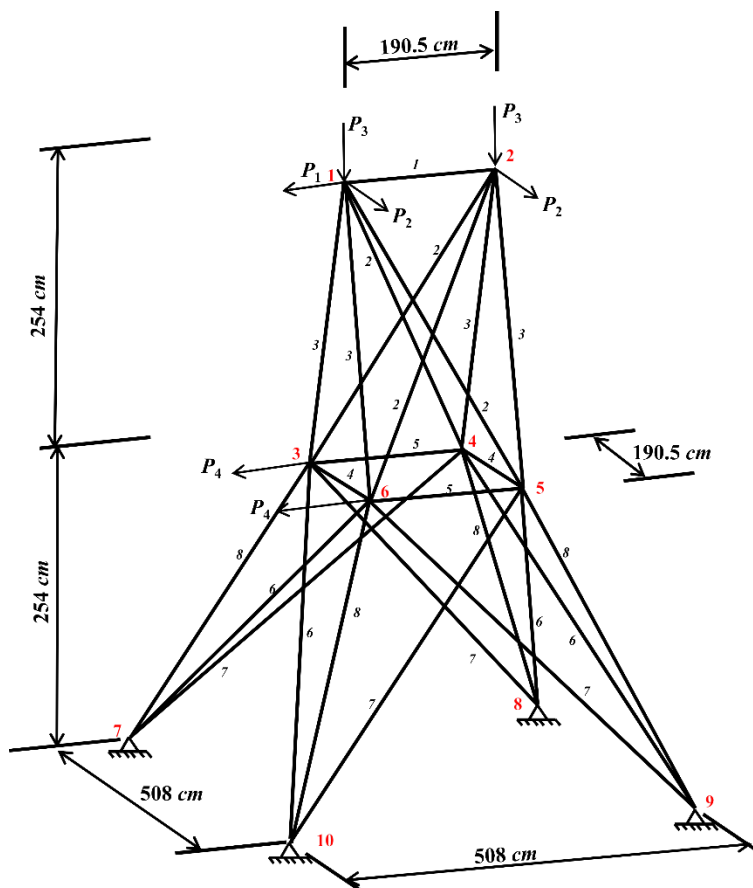


Figura 10. Treliça espacial de 25 barras

Para simplificar a análise, a treliça foi dividida em 8 grupos com propriedades semelhantes. Cada grupo engloba um determinado número de barras, sendo que todas apresentam o mesmo comprimento e seção transversal.

Tabela 7. Comprimento das barras de cada grupo

GRUPO	BARRAS	COMPRIMENTO (CM)
G1	1	190,5
G2	2,3,4,5	331,479
G3	6,7,8,9	271,272
G4	10,11	190,5
G5	12,13	190,5
G6	14,15,16,17	460,101
G7	18,19,20,21	460,101
G8	22,23,24,25	338,997

As cargas pontuais, forças axiais e módulo de elasticidade seguem a distribuição tipo LogNormal. Os parâmetros estatísticos são descritos na tabela 8. Neste problema de *RBDO*, será minimizado o volume de uma treliça de 25 barras que está sujeita a duas restrições probabilísticas e duas determinísticas.

Tabela 8. Parâmetros determinísticos das variáveis

Variável	Unidade	μ	$\gamma = \sigma/\mu$	$f(x)$
$d1$	cm	4	-	determinística
$d2$	cm	10	-	determinística
$d3$	cm	10	-	determinística
$d4$	cm	10	-	determinística
$d5$	cm	10	-	determinística
$d6$	cm	10	-	determinística
$d7$	cm	10	-	determinística
$d8$	cm	10	-	determinística
$P1$	kN	30	5	Lognormal
$P2$	kN	50	5	Lognormal
$P3$	kN	1000	5	Lognormal
$P4$	kN	30	5	Lognormal
E	kN/	20700	1050	Lognormal
fy	kN	27,5	1	Lognormal

A *Formulação RBDO* é descrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{d}^* = \operatorname{argmin} c(\mathbf{d}) : \sum_{i=1}^n l_i A_i$$

$$P[g_l(X(\mathbf{d})) \leq 0] \leq P_{fl}^0, l = 1, \dots, 16$$

Equação 25

$$\text{com } \beta_{\text{target}} = 3,2$$

$$3\text{cm} \leq d_i \leq 20\text{cm}, i = 1, \dots, 25$$

A primeira restrição probabilística é relacionada à tensão de escoamento, a seguir:

$$g_1(x) = f_y - \sigma_i \quad \text{Equação 26}$$

A segunda restrição é relacionada à tensão de Euler e diz respeito à flambagem das barras:

$$g_2(x) = \sigma_{Euler} - \sigma_i \quad \text{Equação 27}$$

No que diz respeito às restrições determinísticas, o diâmetro das barras deve estar entre 3 e 20cm:

$$\begin{aligned} -d_i + 20 &\geq 0 \\ -d_i + 3 &\leq 0 \end{aligned} \quad \text{Equação 28}$$

O índice de confiabilidade $\beta_t = 3,2$ calculado para a treliça plana de 10 barras, descrita anteriormente, será o mesmo considerado nesta análise, visto que ambas as estruturas estão sendo analisadas sob as mesmas condições.

O problema de *RBDO* foi calculado utilizando-se o iHLRF para desenvolver a análise de confiabilidade e o algoritmo Polak- he para desenvolver o algoritmo de otimização. A figura abaixo mostra a relação entre o índice de confiabilidade β e o número de iterações. Nota-se que, assim como na treliça analisada anteriormente, com 5 iterações o índice de confiabilidade $\beta_t = 3,2$ calculado através das recomendações do JCSS, foi atingido.

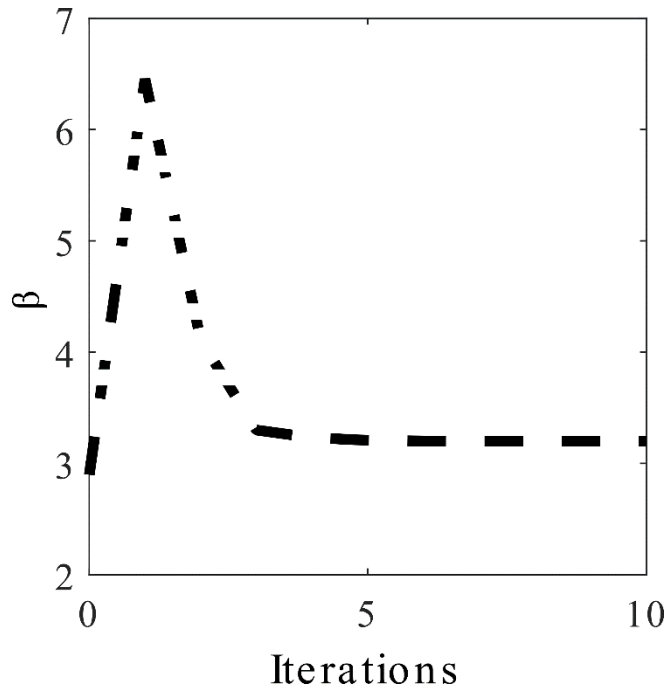


Figura 11.Índice de confiabilidade vs iterações

O processo de *RBDO* foi realizado de forma a minimizar o volume da treliça de 25 barras. No presente trabalho a função de custo é normalizada em relação ao valor inicial em cada iteração para assegurar convergência. O custo normalizado e os valores de volume da treliça ao longo das iterações são mostrados abaixo:

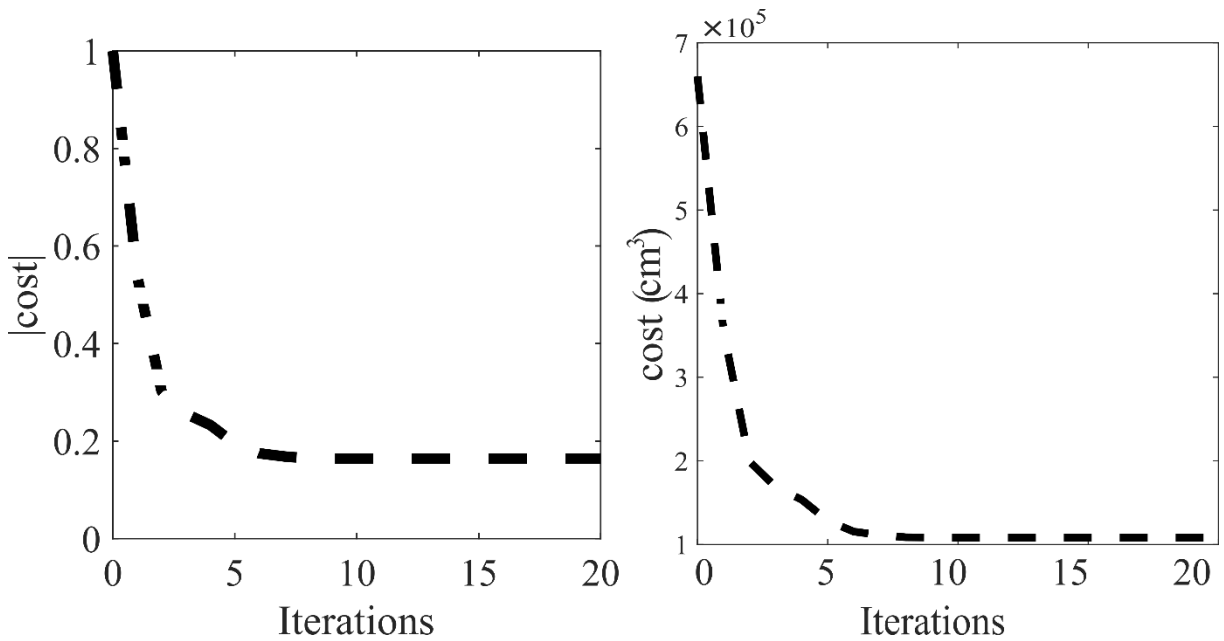


Figura 12.Função minimizada a) função de custo minimizada b) função de custo

Nessa problemática, as barras foram divididas em 8 grupos distintos. O *RBDO* permite que seja determinado um diâmetro para cada grupo, como mostrado na figura a seguir. O resultado final para as barras de cada grupo foi um diâmetro $d_1=4,42\text{ cm}$ $d_2=3,21\text{ cm}$, $d_3=5,82\text{ cm}$, $d_4=4,20\text{ cm}$ $d_5=4,87\text{ cm}$, $d_6=3,17\text{ cm}$, $d_7=3,17\text{ cm}$, $d_8=4,87\text{ cm}$

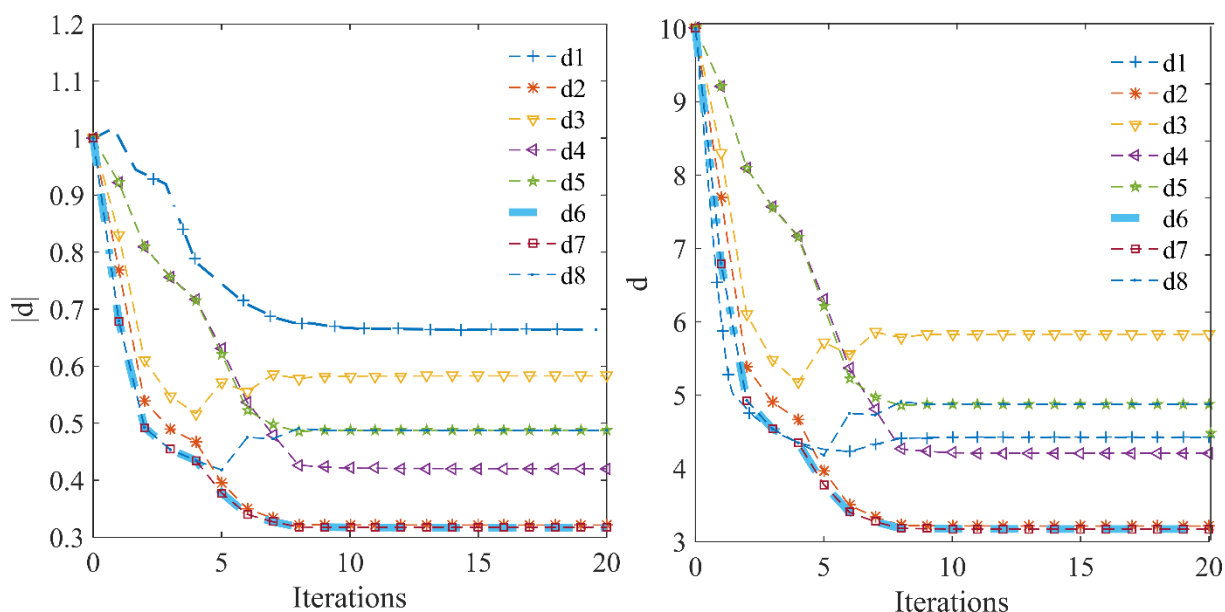


Figura 13. Variáveis de projeto a) variáveis normalizadas vs. Iterações b) variáveis vs. Iterações

Na tabela abaixo são apresentadas as forças axiais resultantes em cada barra da estrutura treliçada assim, como suas reações de apoio. A estrutura foi submetida a cargas pontuais nos nós 1, 2, 3 e 6 e possui apoios do tipo engaste, onde é restringida a liberdade nos eixos x, y e z. Foram utilizados os programas SAP2000 e MatLab para obtenção desses resultados por meio do método da rigidez direta.

Tabela 9. Reações de apoio treliça de 25 barras

REAÇÕES (KN)	R MatLab			R SAP		
	Rx	Ry	Rz	Rx	Ry	Rz
Nó 07	-53,677	27,406	55,000	-51,930	27,830	55,000
Nó 08	113,677	100,233	145,000	111,930	100,650	145,000
Nó 09	27,198	-50,233	45,000	25,450	-50,650	45,000
Nó 10	32,802	22,594	-45,000	34,550	22,170	-45,000

Tabela 10. Forças em cada barra de cada grupo

GRUPO	BARRAS	F MatLab	F SAP
G1	BARRA 1	24,681	22,055
G2	BARRA 2	-77,571	-75,286
G2	BARRA 3	-25,370	-23,085
G2	BARRA 4	-17,576	-15,292
G2	BARRA 5	34,625	36,908
G3	BARRA 6	-103,838	-105,706
G3	BARRA 7	-10,536	-12,405
G3	BARRA 8	-61,118	-62,987
G3	BARRA 9	32,184	30,314
G4	BARRA 10	-4,418	7,078
G4	BARRA 11	19,788	22,167
G5	BARRA 12	-1,866	-3291
G5	BARRA 13	-16,955	20,914
G6	BARRA 14	-13,358	-14,377
G6	BARRA 15	16,832	15,81
G6	BARRA 16	-53,396	-54,415
G6	BARRA 17	-23,205	-24,226
G7	BARRA 18	-46,618	-42,401
G7	BARRA 19	-55,675	-51,459
G7	BARRA 20	11,296	15,511
G7	BARRA 21	2,239	6,453
G8	BARRA 22	61,578	59,223
G8	BARRA 23	-51,459	-53,812
G8	BARRA 24	-135,404	-137,756
G8	BARRA 25	-22,367	-24,226

Os valores das reações de apoio encontrados foram praticamente iguais em ambos os programas. Onde houve diferença, essa foi menor que 10%, fato que não afeta o cálculo da estrutura. Já nos valores das forças axiais encontradas, houve uma divergência superior a 10% apenas nos valores dos nós 8, 9, 10 e 11.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÃO

Através desse trabalho foi possível resolver um problema de otimização baseada em confiabilidade sujeito a uma série de restrições probabilísticas e determinísticas, garantindo de forma racional a eficácia do projeto, fato que se mostra ser um desafio tanto computacional como teórico.

A resolução de problemas de *RBDO* implica na integração de vários procedimentos de diversas áreas: análise de confiabilidade estrutural, simulações, otimização matemática, análise estrutural, sendo esses procedimentos complexos por si só. Isso faz com que a resolução por *RBDO* seja computacionalmente cara, quando comparada com a otimização determinística, fato que pode tornar inviável o projeto de estruturas de grande porte.

A introdução de incertezas relacionadas às propriedades dos materiais, dimensões geométricas e cargas aplicadas, a fim de garantir, de forma quantificada, requisitos de segurança, tem dado lugar a uma nova maneira de se trabalhar na engenharia estrutural, fugindo dos métodos tradicionais.

Foram analisadas duas treliças: uma plana, de 10 barras e uma espacial, de 25. Ambas foram utilizadas para ilustrarem a metodologia RIA, seguindo a abordagem de laço duplo. A análise de confiabilidade foi desenvolvida pelo algoritmo i HLRF e a otimização foi desenvolvida pelo algoritmo Polak-he. A abordagem de laço duplo se mostrou eficiente para o cálculo de um problema de RBDO com um número pequeno de iterações e pouco tempo de execução.

Os resultados obtidos foram os esperados, fato que comprova que o projeto ótimo de uma estrutura pode ser desenvolvido de forma eficiente, tanto por *RBDO* como através dos métodos tradicionais, nos quais são aplicados os coeficientes de segurança.

8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARRAGUÉ.C. L **Metodología eficiente de optimización de diseño basada em fiabilidad aplicada a estructuras.** Tese de doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidad de La Rioja, Espanha (2010)
- BECK, A. – **Curso de Confiabilidade Estrutural.** Apostila USP/São Carlos, 2010.
- DUBOURG, V. **Reliability-based design optimization using kriging surrogates and subset simulation.** Tese de doutorado. Blaise Pascal University, França (2011).
- HASOFER AM, LIND NC. **Exact and invariant second-moment code format.** ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division, 100,111-121 (1974)
- PEREIRA, A. **Otimização baseada em confiabilidade: aplicação a treliças espaciais.** Tese de doutorado, Engenharia Civil, PUC-RIO, Brasil (2007)
- POLAK, E. **Optimization algorithms and consistent approximations.** Springer
- ROYSET J.O. and POLAK E. **Extensions of stochastic optimization results to problems with system failure probability functions.** Journal of Optimization Theory and its Application, 132, 1–18 (2007)
- ROYSET J.O. and POLAK E. **Implementable algorithm for stochastic optimization using sample average approximations.** Journal of Optimization Theory and Applications, 122, 157–184. (2004)
- ROYSET J.O. and POLAK E. **Reliability-based optimal design using sample average approximations.** Probabilistic Engineering Mechanics,19,331-343 (2004)
- TU, J., K. CHOI, and Y. Park **A new study on reliability-based design optimization.** ASME, Journal of Mechanical Design, 121, 557-564 (1999)
- YANG, R.; GU, L. Experience with approximate reliability– based optimization methods. Structural Multidisciplinary Optimization, 26:152–159, 2004. 1.3, 5.7.2, 5.7.2
- YOUN, B. D.; CHOI, K. K. **A new response surface methodology for reliability based design optimization.** Computers and Structures ,82, 241-256 (2004) Vrouwenvelder, Ton **Joint Committee on Structural Safety** vol.19, n.3
- YOUN, B. D.; CHOI, K. K. **An investigation of nonlinearity of reliability-based design optimization approaches.** Journal of Mechanical Design 126,403-411 (2004)
- YOUN, B. D.; CHOI, K. K. **Hybrid analysis method for reliability based design optimization** ASME, Journal of Mechanical Design,125(2):221–232 (2003)